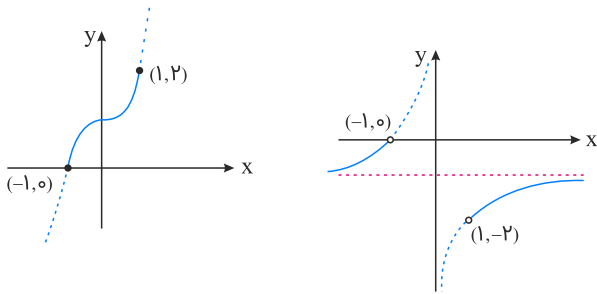




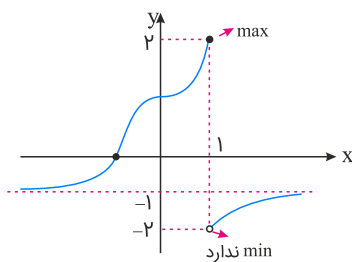
گزینه ۲

۱

باید $y = x^3 + 1$ را در فاصله $[-1, 1]$ و $y = -\frac{1}{x} - 1$ را در فاصله $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ رسم کنیم.



پس نمودار کلی به صورت زیر است:



مطابق شکل ماکزیمم مطلق تابع در $x = 1$ رخ می‌دهد و مینیمم مطلق هم ندارد.

باتوجه به شکل داریم:

$$2x + 1 = 30 \Rightarrow x = 15 - \frac{1}{2}$$

حجم جعبه برابر است با:

$$V = x \times 1 \times 1 = xl^2$$

به جای x قرار می‌دهیم $15 - \frac{1}{2}$ و داریم:

$$V(l) = \left(15 - \frac{1}{2}\right) \times l^2 = 15l^2 - \frac{l^3}{2}$$

ماکزیمم V را پیدا می‌کنیم:

$$V'(l) = 30l - \frac{3}{2}l^2 = \frac{3}{2}l(20 - l) = 0 \Rightarrow \begin{cases} l = 0 \\ l = 20 \end{cases}$$

بیشترین مقدار V به ازای $l = 20$ رخ می‌دهد:

$$V(20) = (15 - 10) \times 20^2 = 5 \times 400 = 2000$$

نقاط بحرانی تابع $f(x)$ ، نقاطی از دامنه تعریف این تابع است که $f'(x) = 0$ یا $f'(x)$ تعریف نشده است.

$$f(x) = (x - 2)x^{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = x^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}(x - 2)x^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x^2} + \frac{2(x - 2)}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{5x - 4}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{5x - 4}{3\sqrt[3]{x}} = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{5}$$

$x = 0$ ریشه مخرج $f'(x)$ می‌باشد، پس در این نقطه تعریف نشده است.

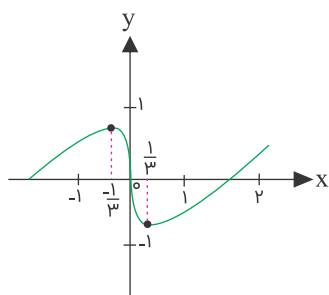
باید مشتق کوچک‌تر از صفر باشد:

$$f(x) = x - \sqrt[3]{3x} \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{3}{3\sqrt[3]{(3x)^2}} < 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{(3x)^2}} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt[3]{(3x)^2} - 1}{\sqrt[3]{(3x)^2}} < 0 \Rightarrow \sqrt[3]{(3x)^2} - 1 < 0 \Rightarrow \sqrt[3]{(3x)^2} < 1 \Rightarrow (3x)^2 < 1$$

$$\Rightarrow |3x| < 1 \Rightarrow -1 < 3x < 1 \Rightarrow -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3} \Rightarrow x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

بیشترین مقدار $b - a = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$ است.
نمودار این تابع هم به شکل زیر است:

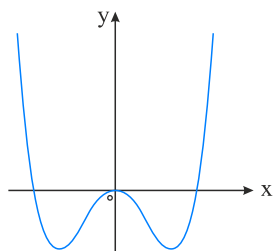


$$f'(x) = 3x^2 + 2ax = 2x(2x^2 + a)$$

برای اینکه تابع ۳ تا اکسترمم نسبی داشته باشد، مشتق باید ۳ ریشه متمایز و ساده داشته باشد که یکی از آن‌ها $x = 0$ است. معادله $2x^2 + a = 0$ به شرطی ۲ ریشه ساده دارد که $a < 0$ باشد. در این صورت جدول تعیین علامت به صورت زیر خواهد بود.

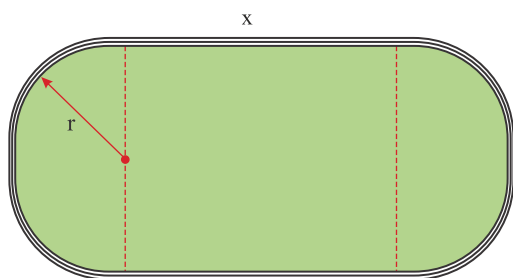
x	$-\sqrt{\frac{-a}{2}}$	0	$\sqrt{\frac{-a}{2}}$
f'	-	+	-
f	$\swarrow$	$\nearrow$	$\swarrow$
	min	max	min

نمودار تابع به صورت زیر می‌شود:



فرض کنید طول مستطیل x باشد. محیط استادیوم برابر است با:

$$2x + 2\pi r = 2x + 6r = 300 \xrightarrow{\div 2} x + 3r = 150 \Rightarrow x = 150 - 3r$$



مساحت استادیوم برابر است با:

$$S = x(2r) + \pi r^2 = x(2r) + 3r^2 \xrightarrow{x=150-3r}$$

$$S = (150 - 3r)(2r) + 3r^2 = 300r - 6r^2 + 3r^2 = 300r - 3r^2$$

روش اول: مساحت به ازای $r = -\frac{b}{2a} = -\frac{300}{-6} = 50$ می‌گردد. پس:

$$S = 300(50) - 3(50)^2 = 7500$$

روش دوم: مساحت استادیوم برابر است با:

$$S = x(2r) + \pi r^2 = x(2r) + 3r^2 \xrightarrow{x=150-3r} S = (150 - 3r)(2r) + 3r^2$$

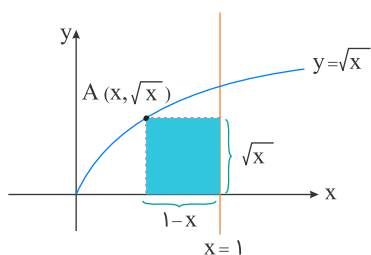
$$= 300r - 6r^2 + 3r^2 = 300r - 3r^2$$

$$S' = 0 \Rightarrow 300 - 6r = 0 \Rightarrow r = 50$$

پس ماکزیمم مساحت به ازای $r = 50$ ایجاد می‌شود:

$$S_{\max} = S(50) = 0 + 3(50)^2 = 7500$$

مختصات نقطه A روی $y = \sqrt{x}$ به صورت $(x, \sqrt{x})$ است.



پس مساحت مستطیل برابر است با:

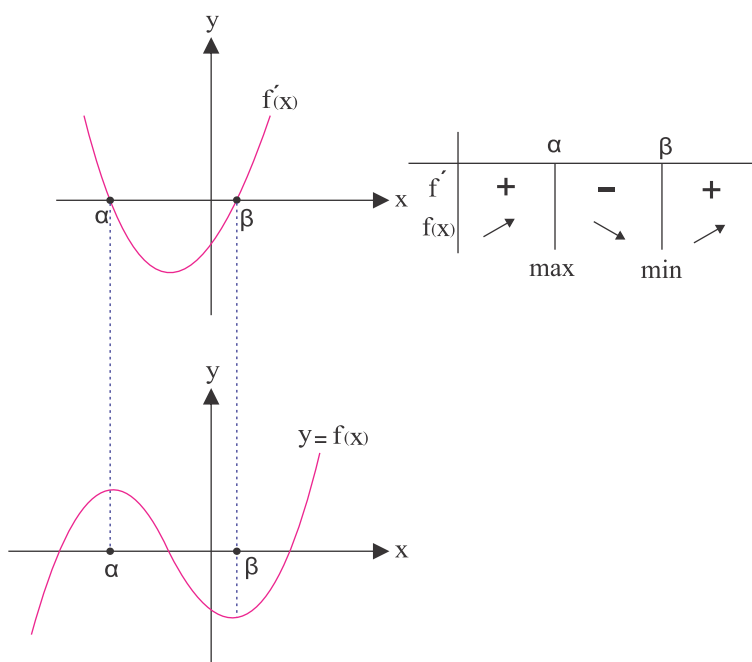
$$S = (1 - x)\sqrt{x}, \quad 0 < x < 1$$

باید S ماکزیمم شود، پس مشتق آن را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$S' = -1 \times \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}(1 - x) = \frac{-2x + 1 - x}{2\sqrt{x}} = \frac{1 - 3x}{2\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$\max(S) = S\left(\frac{1}{3}\right) = \left(1 - \frac{1}{3}\right)\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

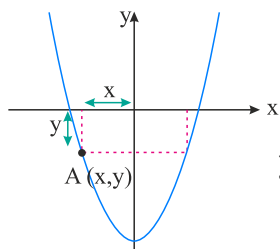
از نمودار زیر به جدول زیر می‌رسیم:



پس گزینه ۱ صحیح است.

باتوجه به شکل زیر، اگر مساحت مستطیل را با S نشان دهیم:

$$S = 2xy \xrightarrow{y = x^2 - 27} S = 2x(x^2 - 27) = 2x^3 - 54x$$



اکنون حدود تغییرات x را به دست می‌آوریم:

$$y = x^2 - 27 = 0 \Rightarrow x^2 = 27 \Rightarrow x = \pm 3\sqrt{3} \xrightarrow{\text{باتوجه به شکل}} x = -3\sqrt{3}$$

$$\text{تابع مساحت : } S(x) = 2x^3 - 54x ; x \in [-3\sqrt{3}, 0]$$

$$S'(x) = 6x^2 - 54 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = -3$$

$$S_{\max} = S(-3) = -6(9 - 27) = 108$$

هرجا درون قدر مطلق صفر شود و یا مشتق صفر باشد، نقطه بحرانی داریم:

$$x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1, x = -1$$

به کمک جدول تعیین علامت زیر، تابع $f(x)$ و مشتق آن:

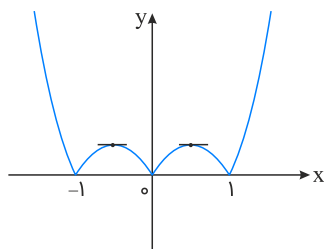
x	-1	0	+1
x	-	-	+
$x^2 - 1$	+	-	+
$x^3 - x$	-	+	-

$$f(x) = |x^3 - x| = \begin{cases} x^3 - x & ; -1 \leq x \leq 0, x \geq 1 \\ -(x^3 - x) & ; x \leq -1, 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\frac{1}{3}} \text{ ق.ق. غ.} \\ x = -\sqrt{\frac{1}{3}} \text{ ق.ق. غ.} \end{cases} \\ -3x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\frac{1}{3}} \text{ ق.ق. غ.} \\ x = -\sqrt{\frac{1}{3}} \text{ ق.ق. غ.} \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$$

پس روی هم ۵ نقطه بحرانی وجود دارد. نمودار $f(x) = |x^3 - x|$ به صورت زیر است:



نقاطی که f' در آن‌ها تغییر علامت می‌دهد، نقاط اکسترمم نسبی هستند. جدول تعیین علامت را در نقطه $x = a$ رسم می‌کنیم:

x		a	
f'	+	۰	-
f			

↑
نسبی max

باتوجه به شکل می‌دانیم $f'(a) = 0$.

$$f(x) = 2x\sqrt{x} - x^2 \Rightarrow f'(x) = 2\sqrt{x} + \frac{2x}{2\sqrt{x}} - 2x = 0$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x} + \sqrt{x} = 2x \Rightarrow 3\sqrt{x} = 2x \xrightarrow{\text{توان } 2} 9x = 4x^2$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 9x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \times \\ x = \frac{9}{4} \end{cases}$$

ماکزیمم مطلق تابع را در فاصله $[1, 4]$ می‌خواهیم. مقدار تابع را در نقاط بحرانی‌اش پیدا می‌کنیم:

$$f(1) = 2 - 1 = 1$$

$$f(4) = 16 - 16 = 0$$

$$f\left(\frac{9}{4}\right) = 2\left(\frac{9}{4}\right)\left(\frac{3}{2}\right) - \left(\frac{9}{4}\right)^2 = \frac{108 - 81}{16} = \frac{27}{16}$$

ابتدا از تابع مشتق می‌گیریم:

$$f'(x) = 2x^2 + 2ax + b$$

باتوجه به اینکه تابع فقط در بازه $(-3, 2)$ نزولی است، پس $x = 2$ و $x = -3$ ریشه‌های $f'(x)$ است.

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = 2 - 3 = -1 \Rightarrow -1 = \frac{-2a}{2} \Rightarrow a = 1 \\ P = x_1 \times x_2 = 2 \times -3 = -6 \Rightarrow -6 = \frac{b}{2} \Rightarrow b = -12 \end{cases} \Rightarrow a - b = 1 - (-12) = 13$$

طول اضلاع قائمه مثلث را a و b فرض می‌کنیم.
می‌دانیم $a^2 + b^2 = 12$ ، پس: $b = \sqrt{12 - a^2}$

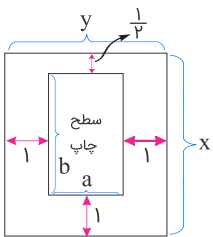
$$S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}a\sqrt{12 - a^2} \Rightarrow S' = \frac{1}{2}(\sqrt{12 - a^2} - \frac{2a(a)}{2\sqrt{12 - a^2}})$$

$$\Rightarrow S' = 0 \Rightarrow 12 - a^2 = a^2 \Rightarrow a = \sqrt{6} \Rightarrow b = \sqrt{6}$$

بنابراین بیشترین مقدار S برابر است با:

$$S = \frac{1}{2}(\sqrt{6})(\sqrt{6}) = 3$$

صفحه کتاب به شکل زیر است:



$$\begin{cases} a = y - 2 \\ b = x - \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow S_{\max} = (y - 2)(x - \frac{3}{2})$$

$$xy = 432 \Rightarrow y = \frac{432}{x}$$

$$S_{\max} = (\frac{432}{x} - 2)(x - \frac{3}{2}) \Rightarrow S' = -\frac{432}{x^2}(x - \frac{3}{2}) + (\frac{432}{x} - 2) = 0$$

$$-432x + 216 \times 3 + 432x - 2x^2 = 0 \Rightarrow x = 18 \quad (*)$$

$$y = \frac{432}{x} \xrightarrow{(*)} y = \frac{432}{18} = 24$$

راه حل دوم: دقت کنید که باتوجه به گزینه‌ها فقط حاصل ضرب ۱۸ و ۲۴ برابر با ۴۳۲ می‌شود، پس گزینه ۱ صحیح است.

نقطهٔ $A(\frac{1}{p}, \frac{1}{p})$ ماکزیمم نسبی تابع $f(x) = \frac{ax}{bx^p + 1}$ است، پس اولاً در تابع صدق می‌کند.

$$f(\frac{1}{p}) = \frac{1}{p} \Rightarrow \frac{\frac{a}{p}}{\frac{b}{p^p} + 1} = \frac{1}{p} \Rightarrow a = \frac{b}{p} + 1 \Rightarrow pa = b + p \quad (1)$$

ثانیاً مشتق در این نقطه برابر صفر است:

$$y' = \frac{a(bx^p + 1) - pbx(ax)}{(bx^p + 1)^p} = 0 \xrightarrow{\text{صورت}=0} abx^p + a - pabx^p = 0$$

$$\Rightarrow a - abx^p = 0 \Rightarrow a(1 - bx^p) = 0 \xrightarrow{x=\frac{1}{p}} 1 - \frac{b}{p} = 0 \Rightarrow b = p$$

از رابطهٔ (۱) مقدار a برابر p به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}
 x \in [0, 1] &\Rightarrow y = \frac{x-1}{x^2+1} \\
 \Rightarrow y' &= \frac{1(x^2+1) - 2x(x-1)}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2} = 0 \\
 \Rightarrow x^2-2x-1 &= 0 \Rightarrow \Delta = (-2)^2 - 4(1)(-1) = 8 \\
 \Rightarrow x_{1,2} &= \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = \begin{cases} 1+\sqrt{2} & \text{غقق} \\ 1-\sqrt{2} & \text{غقق} \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x \in [-1, 0] &\Rightarrow y = \frac{-x-1}{x^2+1} \\
 \Rightarrow y' &= \frac{-1(x^2+1) - 2x(-x-1)}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow \frac{x^2+2x-1}{(x^2+1)^2} = 0 \\
 \Rightarrow x^2+2x-1 &= 0 \Rightarrow \Delta = 4 - 4(1)(-1) = 8 \\
 \Rightarrow x_{1,2} &= \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = \begin{cases} -1+\sqrt{2} & \text{غقق} \\ -1-\sqrt{2} & \text{غقق} \end{cases}
 \end{aligned}$$

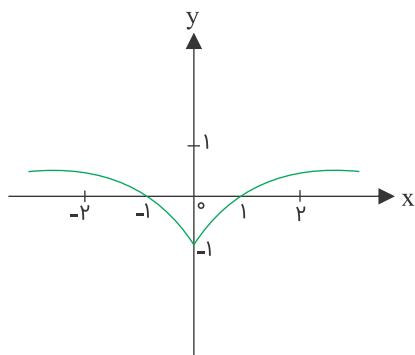
بنابراین در هیچ نقطه‌ای مشتق صفر نمی‌شود، نقاط بحرانی در فاصله $[-1, 1]$ برابر $x = -1, 0, 1$ هستند، مقادیر تابع را در این نقاط پیدا می‌کنیم:

$$y(-1) = 0, \quad y(1) = 0, \quad y(0) = -1$$

پس ماکزیمم مطلق برابر صفر و مینیمم مطلق برابر -1 است.

$$\max + \min = 0 + (-1) = -1$$

ضمناً نمودار این تابع به شکل زیر است:



$$f(x) = x^5 - 2x^3 + f(1) \Rightarrow f'(x) = 5x^4 - 6x^2 + 0 = 2x^3(2 - 3x)$$

مشتق را تعیین علامت می‌کنیم:

x	0	$\frac{2}{3}$
f'	-	+
f		

تابع در فاصله $\left[0, \frac{2}{3}\right]$ اکیداً صعودی است.

$$b - a = \frac{2}{3} - 0 = \frac{2}{3} = 0.66$$

$$f'(x) = \frac{-a(x+2)}{x^3} = 0 \Rightarrow x = -2$$

در همسایگی $x = -2$ ، f' تغییر علامت می‌دهد، بنابراین $x = -2$ طول نقطه اکسترمم تابع است.

$$f(-2) = -\frac{a}{4} \Rightarrow f \text{ نقطه اکسترمم} = M(-2, -\frac{a}{4})$$

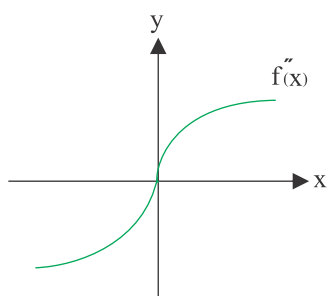
معادله سهمی موردنظر را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$y = x^2 - 2bx + 1 = (x-b)^2 - b^2 + 1 \Rightarrow \text{رأس سهمی} = S(b, 1 - b^2)$$

با برابر قرار دادن مختصات نقاط M و S داریم:

$$\begin{cases} b = -2 \\ -\frac{a}{4} = 1 - b^2 \end{cases} \Rightarrow -\frac{a}{4} = -3 \Rightarrow a = 12$$

می‌دانیم $f''(x)$ همان مشتق $f'(x)$ است، پس:



		o	
f''	-		+
f'	↘		↗

بنابراین $y = f'(x)$ در فاصله $[0, +\infty)$ اکیداً صعودی است.